Co nového v problému N - dam

(What's new in N-queens problem)

(Václav Kotěšovec)

1) K Lačného článku

Článek Ľudovíta Lačného mě velmi zaujal, protože jsem se sám touto problematikou zabýval a problém patří k těm, které se snadno formulují a jejichž řešení se těžko hledá. Rád bych shrnul Lačného výsledky a doplnil je o nové. Nejprve k rozmístění **s** dam na šachovnici **s** x **n**. Pro s=2 až 7 jsou známé následující polynomy vyjadřující počty možných rozmístění nenapadajících se dam pro danou šachovnici:

$P_2 = n^2$-**3**n+**2**
$P_3 = n^3$-**9**n^2+**30**n-36
$P_4 = n^4$-**18**n^3+**139**n^2-534n+840, n>=7 (*Gustav Tarry, 1890*)
$P_5 = n^5$-**30**n^4+**407**n^3-3098n^2+13104n-24332, n>=11 (*V.Kotěšovec, Rex Multiplex 38/1992*)
$P_6 = n^6$-**45**n^5+**943**n^4-11755n^3+91480n^2-418390n+870920, n>=17 (*V.Kotěšovec, 1992*)
$P_7 = n^7$-**63**n^6+**1879**n^5-34411n^4+417178n^3-3336014n^2+16209916n-36693996, n>=23 (*V.Kotěšovec, 1992*)

Výsledky z Lačného článku specifikují vektory (sloupce) koeficientů polynomu

$3\binom{s}{2}$= [**3, 9, 18, 30, 45, 63**, 84, 108, ...]   (tento jsem odhadl již já v roce 1992)

$15\binom{s}{4}+12\binom{s}{3}+2\binom{s}{2}^2+2\binom{s-1}{3}+\binom{s-2}{2}+\left[\frac{s}{2}\right]-1$= [**2, 30, 139, 407, 943, 1879**, 3378, 5626, ...]
(Lačného výsledek, numericky jsem ověřil jeho platnost)

Je zajímavé, že toto jsou vlastně také polynomy, ale pro **s**:
$3s^2/2-3s/2$, $9s^4/8-29s^3/12-s^2/8+23s/12$ (pro **s** liché ještě -1/2)

Z Lačného článku speciálně vyplývá, že další polynomy (pro šachovnice 8xn, 9xn, ...) mají tvar
$P_8 = n^8-84n^7+3378n^6-\ldots$
$P_9 = n^9-108n^8+5626n^7-\ldots$
Oceňuji též vysvětlení proč vzorce platí až od poměrně velkého **n**.

2) Nové výsledky

Zrychlení počítačů umožnilo stanovit počty řešení klasického problému **n**-dam na šachovnici **n**x**n** až do **n=23** ! **Sylvain Pion** a **Joel-Yann Fourre** získali v roce 1996 hodnoty pro n=21 až 23 programem pro několik desítek paralelních procesorů, ale přes tento výkonný hardware si výpočty vyžádaly několik týdnů.

Zajímavý je též vývoj odhadu průběhu této funkce. **I.Rivin**, **I.Vardi** a **P.Zimmermann** publikovali v roce 1994 v časopise Amer.Math.Monthly článek "The n-queens problem", ve kterém analyzují problém **n**-dam a počet různých pozic označují Q(n). Pro mnohé bude překvapující, že neohrožující se dámy je možné rozestavit také na prstencové šachovnici (toroidal board) pro některá lichá N. Tuto funkci označují T(n). Vyslovují zde hypotézu o průběhu těchto funkcí. Obě funkce jsou podle nich řádu n^{an}, kde obě konstanty **a** jsou <1 *(hodnoty jsem doplnil o aktuální výsledky, tehdy jen do n=20)*.

Jak se zdá, byla tato hypotéza nyní vyvrácena. **Birger Nielsen** vyslovil v roce 2000 na svoji internetové stránce hypotézu založenou na pravděpodobnosti **p** pro umístění dámy na dalším sloupci. Předpokládá, že $Q(n) \sim n!\,p^{n-1}$, kde p ~ 0.3885... Dokládá to výpočty pro **n** až do 23 a hodnota **p** je překvapivě stabilní (na rozdíl od konstant ve výše citovaném článku), z čehož lze usuzovat, že řada je možná konvergentní *(hodnoty jsou v posledním sloupci tabulky)*. Nalezení řádu funkce Q(n) nebo dokonce přímého vzorce bylo snem řady generací matematiků a určitě sám Gauss by byl nadšen z těchto výsledků. Obě hypotézy můžete porovnat v tabulce.

Pokud přijmeme druhou hypotézu, pak s použitím Stirlingova vzorce $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ dostaneme

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log Q(n)}{n \log n} = 1$ a tím pádem konstanta **a** z první hypotézy →**1**, což tuto hypotézu znehodnocuje.

n	T(n)	$\frac{\log T(n)}{n \log n}$	Q(n)	$\frac{\log Q(n)}{n \log n}$	$\left(\frac{Q(n)}{n!}\right)^{\frac{1}{n-1}}$
1	1	-	1	-	-
2	0	-	0	-	-
3	0	-	0	-	-
4	0	-	2	0.12500	0.436790
5	10	0.28613	10	0.28613	0.537285
6	0	-	4	0.12895	0.353953
7	28	0.24463	40	0.27081	0.446620
8	0	-	92	0.27181	0.419382
9	0	-	352	0.29651	0.420095
10	0	-	724	0.28597	0.388049
11	88	0.16974	2680	0.29926	0.382559
12	0	-	14200	0.32063	0.387578
13	4524	0.25243	73712	0.33612	0.388542
14	0	-	365596	0.34669	0.385792
15	0	-	2279184	0.36039	0.387849
16	0	-	14772512	0.37213	0.388976
17	140692	0.24612	95815104	0.38156	0.388506
18	0	-	666090624	0.39050	0.388371
19	820496	0.24341	4968057848	0.39908	0.388602
20	0	-	39029188884	0.40703	0.388822
21	0	-	314666222712	0.41408	0.388575
22	0	-	2691008701644	0.42087	0.388583
23	128850048	0.25894	24233937684440	0.42734	0.388717
24	0	-	?	?	?
25	1957725000	0.26586	?	?	?
.					
∞		→1 ?		→1 ?	→0.3885... ?