Theorem *(Václav Kotěšovec, 25.8.2012)*
Asymptotic formula for number of fat trees on n labeled vertices (OEIS A055779) is

$$a_n \sim c * n^{n-2} * q^n$$

constants

$$q = 1.655487912991534306625211618625179103189 \ldots$$
$$c = 0.75556810736 \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} = (1-p)^{p-1} * p^{1-2p} = q = 1.6554879129915343 \ldots$$

where p = 0.6924583254616546080959391445380742... *is the root of the equation*

$$e^{\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \frac{1-p}{p^2}$$

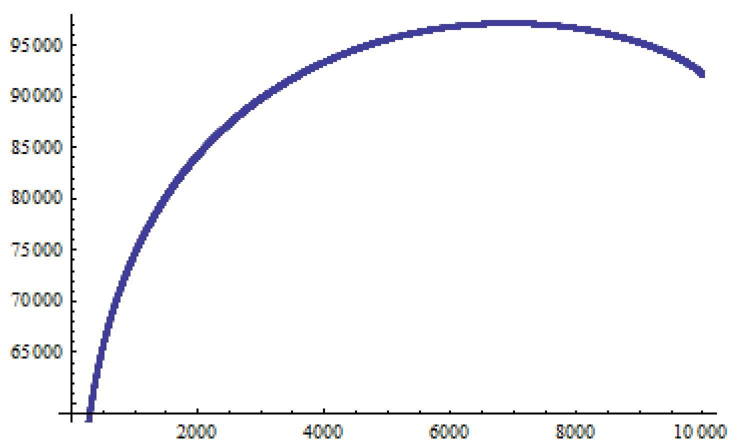
Důkaz (*proof*):
V OEIS (kam sekvenci v roce 2000 zadal Thomas Zaslavsky) najdeme vzorec, který odvodil Vladeta Jovovic v roce 2006

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k} n^{k-2}$$

Cílem mého článku je určit, jak se tato suma chová, když jde n do nekonečna. Nejprve zjistíme, který z členů předchozí sumy je maximální. K orientaci nám pomůže graf (v logaritmickém měřítku) pro n=10000, ze kterého je vidět, že maximum nenastává v krajních bodech, ale uprostřed grafu, spíše v pravé části. Krajní hodnota vpravo (pro $k = n$) je rovna n^{n-2} (viz Cayley's formula) a je dolním omezením sumy.

With using of Stirling formula I found maximal term in sum for a_n.

```
n = 10000; ListPlot[Table[Log[Binomial[n, k] * k^(n - k) * n^(k - 2)], {k, 1, n}]]
```



V souladu s obvyklým značením nahradíme $k \to x$. K určení bodu, kde nastává maximum, stačí zjistit, kde je tečna rovnoběžná s osou x, tj. kde je derivace této funkce (podle x) rovna 0. Jelikož nás zajímá pouze asymptotický průběh, můžeme k nahrazení faktoriálů (stačí jen těch, které jsou závislé na x) použít Stirlingův vzorec, ze kterého plyne

$$f(x) \sim \frac{e^n n^{-2+x} (n-x)^{-\frac{1}{2}-n+x} x^{-\frac{1}{2}+n-2x} n!}{2\pi}$$

K řešení tak dostaneme rovnici

$$f'(x) = \frac{1}{4\pi} e^n n^{-2+x} (n-x)^{-\frac{3}{2}-n+x} x^{-\frac{3}{2}+n-2x} n!\,(2n^2 + 2x(1+x) - n(1+4x) + 2(n-x)x(\log(n) + \log(n-x) - 2\log(x))) = 0$$

Nyní zavedeme substituci

$$x = p * n$$

kde p je konstanta v intervalu (0,1) a rovnice se zjednoduší na

$$-1 + 2n(-1+p)^2 + 2p - 2n(-1+p)p(\log(n) - 2\log(np) + \log(n-np)) = 0$$

a pokud řešíme předchozí rovnici pro *n* jdoucí do nekonečna, můžeme celou rovnici **vydělit *n*** a určit limitu. Pro $n \to \infty$ jdou pak některé členy k nule, zůstane tak následující rovnice pro *p*

$$2 * (p-1)^2 - 2 * p * (p-1) * \log((1-p)/p^2) = 0$$

Kořen *p* = 1 nás nezajímá a tak se pro hledané *p* rovnice zjednoduší na

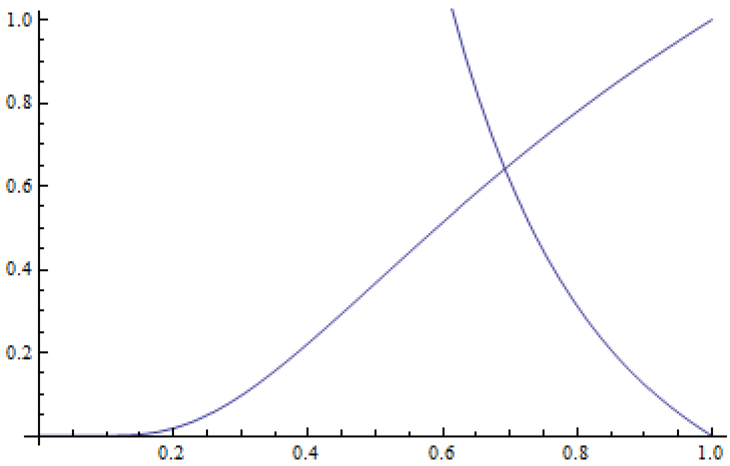
$$p - 1 - p * \log((1-p)/p^2)$$

Nebo po úpravě

$$e^{1-\frac{1}{p}} = \frac{1-p}{p^2}$$

Průběh obou funkcí vidíme na grafu

```
Show[Plot[E^(1 - 1 / p), {p, 0, 1}], Plot[(1 - p) / p^2, {p, 0, 1}]]
```



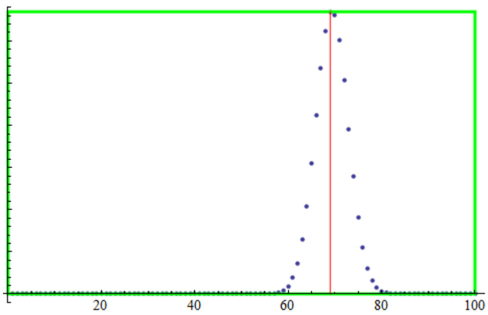
Numericky dostáváme

$$p = 0.6924583254616546080959391445380742...$$

Nyní určíme jakou hodnotu má celková suma. Určitě platí, že součet musí být větší než samotná hodnota maxima a menší než plocha obdélníku s jednou stranou rovnou maximu a druhou počtu členů sumy, tedy

$$f(pn) \leq a_n \leq n * f(pn)$$

Sum of terms is greater than value of maximum (red line) and lower than rectangle with sides n x max (green area).



graph for n=100

Z předchozí nerovnosti plyne

$$1 \le \frac{a_n}{f(pn)} \le n$$

Když tuto nerovnost umocníme na $1/n$, dostaneme

$$1 \le \left(\frac{a_n}{f(pn)}\right)^{\frac{1}{n}} \le n^{1/n}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{f(pn)}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

Při hledání asymptotického chování stačí tedy použít pouze **hodnotu v maximu**, pro n jdoucí do nekonečna má pak stejnou limitu jako celá suma. Dostaneme

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(f(pn)\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n^{n-\frac{5}{2}} * (1-p)^{n(p-1)-\frac{1}{2}} * p^{-2np+n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/n}}{n} = (1-p)^{-1+p} p^{1-2p}$$

Numericky po dosazení již známé hodnoty p vychází

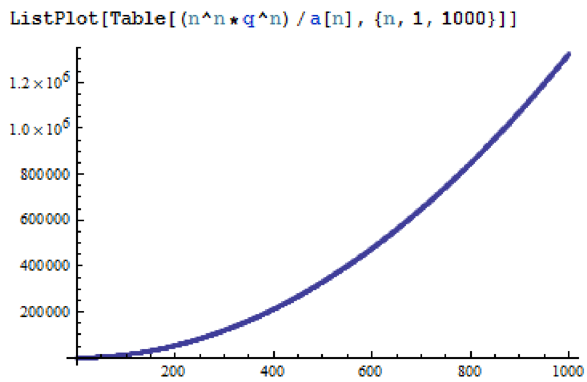
$$q \;=\; 1.655487912991534306625211618625179103189\,\ldots$$

Value of constant q is proved analytically, then verified numerically.
I not found symbolic form of constant c and computed it only numerically.

Tuto hodnotu jsem ověřil též **numericky** a při použití n = 524288 a Richardsonovy extrapolace vychází přibližná hodnota 1.65548791824616391, což se shoduje na 8 desetinných míst. V programu Mathematica:

```
a[n_]:=Sum[Binomial[n,k]*k^(n-k)*n^(k-2),{k,1,n}];
n=16;qnew=0;
Do[qold=qnew;n=2*n;Print[n,", time=",Timing[qnew=N[a[n]^(1/n)/n,20];],", memory=",MaxMemoryUsed[]];
  richardson=2*qnew-qold;
  Print[qnew," ",richardson];
  ,{iter,1,20}];
```

Konstantu q jsem určil analyticky. Pro vyjádření konstanty c jsem nějaké podobné symbolické vyjádření nenašel (možná ani neexistuje), vypočetl jsem ji však numericky na 11 desetinných míst. Z předchozí limity a kvadratického průběhu následujícího podílu



jsem odhadl, že asymptotický průběh bude mít tvar

$$a_n \sim c * n^{n-2} * q^n$$

kde konstantu q již známe.

Konstantu *c* dostaneme numericky podobným programem

```
a[n_]:=Sum[Binomial[n,k]*k^(n-k)*n^(k-2),{k,1,n}];
q=1.65548791299153430662521161862517910318 9;
n=16;cnew=0;
Do[cold=cnew;n=2*n;Print[n,", time=",Timing[cnew=N[a[n]/(n^(n-2)*q^n),20];],", memory=",MaxMemoryUsed[]];
  richardson=2*cnew-cold;
  Print[cnew," ",richardson];
  ,{iter,1,15}];
```

```
65 536, time={238.634, Null}, memory=21 441 976
0.75556725913649537615 0.75556810737300890 71
131 072, time={1273.19, Null}, memory=21 441 976
0.75556768325170587828 0.75556810736691638 04
262 144, time={6023.34, Null}, memory=21 441 976
0.75556789530854956748 0.75556810736539325 67
524 288, time={28 995.8, Null}, memory=23 768 344
0.75556800133678102211 0.75556810736501247 67
```

platné cifry jsou

$$c = 0.75556810736 \ldots$$

Definice v OEIS A055779

"A fat tree on vertex set V is a partition of V together with edges (between vertices, not parts) that link the parts of the partition in a tree-like pattern: that is, when the parts are collapsed to points, the edges are a (free) tree. A fat tree is in a (multi)graph G when the edges are edges of G."

Doporučuji ještě následující linky s podobnou problematikou:
http://mathworld.wolfram.com/Tree.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_(graph_theory)
http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley's_formula

This article was published on website http://web.telecom.cz/vaclav.kotesovec/math.htm, 27.8.2012